



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΣΚΟΠΙΟ



Από την Ομάδα Έκδοσης

Η πανδημία και η αδυναμία πρόβλεψης για την εξέλιξή της κατά τους επόμενους μήνες, οδήγησαν το ΔΣ του ΕΣΙ στην τελευταία του συνεδρίαση, σε συνεννόηση με την Τοπική Οργανωτική Επιτροπή του ΕΣΙ2020, στην απόφαση να μετατεθεί το 33^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Στατιστικής για τον Μάιο του 2021 στη Λάρισα σε συνεργασία με τα Τμήματα Διοίκησης Επιχειρήσεων και Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Ταυτόχρονα το ΔΣ του ΕΣΙ σε συνεργασία με το Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας αποφάσισε τη διοργάνωση της Διαδικτυακής Εκδήλωσης ΕΣΙ2020 το Σαββατοκύριακο 26-27 Σεπτεμβρίου 2020 με δύο ενότητες

(α) το διαδικτυακό εκπαιδευτικό σεμινάριο *Οπτικής Αναλυτικής* διάρκειας 7 ωρών με εισηγήτρια τη συνάδελφο Κυριακή Τσιλίκα του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και

(β) την ειδική συνεδρία *ΘΕΟΦΙΛΟΣ ΚΑΚΟΥΛΛΟΣ* διάρκειας 2 ωρών με επιστημονικές ομιλίες συνεργατών του Καθ. Κάκουλλου με οργανωτές τους συναδέλφους Β. Πιπερίγκου, Παν. Πατρών και Χ. Χαραλαμπίδη, Παν. Αθηνών.

Για τη στήριξη του ΕΣΙ αποφασίστηκε όπως η διαδικτυακή εκδήλωση ΕΣΙ2020 αξιοποιηθεί για την οικονομική στήριξη και ενίσχυση του ΕΣΙ και των σκοπών του. Έτσι αποφασίστηκε

(α) Τα μέλη του ΔΣ του ΕΣΙ να ενισχύσουν με το ποσόν των 20 ευρώ για το 2020, το ΕΣΙ και εφόσον επιθυμούν να έχουν ελεύθερη πρόσβαση στην ειδική συνεδρία *ΘΕΟΦΙΛΟΣ ΚΑΚΟΥΛΛΟΣ*,

(β) Οι φοιτητές που επιθυμούν να παρακολουθήσουν το διαδικτυακό εκπαιδευτικό σεμινάριο να ενισχύσουν με το ποσόν των 30 ευρώ για το 2020, το ΕΣΙ και εφόσον επιθυμούν να έχουν ελεύθερη πρόσβαση στην ειδική συνεδρία *ΘΕΟΦΙΛΟΣ ΚΑΚΟΥΛΛΟΣ*

(γ) Τα μέλη του ΕΣΙ που επιθυμούν να παρακολουθήσουν την ειδική συνεδρία *ΘΕΟΦΙΛΟΣ ΚΑΚΟΥΛΛΟΣ* να ενισχύσουν με το ποσόν των 20 ευρώ για το 2020, το ΕΣΙ.

Υπενθυμίζεται ότι για την ενίσχυση/στήριξη του ΕΣΙ αλλά και τις ετήσιες συνδρομές οι τραπεζικοί λογαριασμοί του ΕΣΙ είναι

Πειραιώς:

IBAN: GR12 0172 0290 0050 2906 8524 853

Εθνική:

IBAN: GR 17 0110 1160 0000 1164 8005 590

33^ο Πανελλήνιο Συνέδριο ΕΣΙ

Με απόφαση του ΔΣ του ΕΣΙ και σε συνεννόηση με την Τοπική Οργανωτική Επιτροπή, η διοργάνωση του 33^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Στατιστικής μετατίθεται για τον Μάιο του 2021 στις εγκαταστάσεις του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας στη Λάρισα (Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων και Τμήμα Οικονομικών Επιστημών).

Υπενθυμίζεται ότι η Οργανωτική Επιτροπή του Συνεδρίου αποτελείται από τους συναδέλφους:

Κ. Συρακούλη (Παν. Θεσσαλίας),

Δ. Τσέλιο (Παν. Θεσσαλίας),

Α. Κουστέλιο (Παν. Θεσσαλίας),

Η. Κεβόρκ (Παν. Θεσσαλίας),

Κ. Τσιλίκα (Παν. Θεσσαλίας),

Χ. Νάκα (Παν. Θεσσαλίας),

Ε. Αγγελή (Αριστοτέλειο Παν. Θεσσαλονίκης) και

Π. Μουσιάδη (Αριστοτέλειο Παν. Θεσσαλονίκης).

Δηλώσεις συμμετοχής και υποβολή περιλήψεων που έχουν ήδη υποβληθεί μεταφέρονται ως έχουν για το ΕΣΙ2021, τον Μάιο του 2021.

Η ιστοσελίδα <http://esi2020.uth.gr/> θα ανανεωθεί αμέσως μόλις αποφασισθεί η ακριβής περίοδος διοργάνωσης του Συνεδρίου.

Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο, Σολομού 5, 10683 Αθήνα
Τηλ. – Fax: 210-3303909

E-mail: secretariat@esi-stat.gr, website: www.esi-stat.gr,
fb:ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Greek Statistical Institute, 5 Solomou str., GR-10683 Athens
Phone – Fax: ++30-210-3303909

Ομάδα Έκδοσης Περισκοπίου: Διοικητικό Συμβούλιο ΕΣΙ

Διοικητικό Συμβούλιο ΕΣΙ:

Α. Καραγρηγορίου, Πρόεδρος, Χ. Μουσιάδης, Αντιπρόεδρος, Μ. Βαμβακάρη, Ειδικός Γραμματέας, Γ. Ψαρράκος, Γενικός Γραμματέας, Σ.

Μαλεφάκη, Ταμίας, Γ. Παπαδόπουλος, Έφορος Βιβλιοθήκης, Σ. Μπερσίμης, Σύμβουλος

Λιαδικτυακή Εκδήλωση ΕΣΙ2020

Το ΔΣ του ΕΣΙ σε συνεργασία με το Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας διοργανώνουν τη **διαδικτυακή εκδήλωση ΕΣΙ2020** το **Σαββατοκύριακο 26-27 Σεπτεμβρίου 2020** με το εξής πρόγραμμα:

Εκπαιδευτικό/Επιμορφωτικό Σεμινάριο

Οπτικοποίηση Δεδομένων: Εργαλεία και Τεχνικές για Δεδομένα από Φύλλα Excel

Εισηγήτρια: Κυριακή Τσιλίκα, Παν. Θεσσαλίας

- Μέρος Α – Σάββατο 26/9 11:00-15:00

- Μέρος Β – Κυριακή 27/9 11:00-14:00.

Ειδική Συνεδρία ΘΕΟΦΙΛΟΣ ΚΑΚΟΥΛΛΟΣ

Υπεύθυνοι Διοργάνωσης: Βιολέττα Πιπερίγκου, Πανεπιστήμιο Πατρών και Χαράλαμπος Χαραλαμπίδης, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

- Κυριακή 27/9 17:00-19:00.

Δηλώσεις Συμμετοχής

Οι ενδιαφερόμενοι να συμμετάσχουν στην Εκδήλωση ΕΣΙ2020 παρακαλούνται να δηλώσουν συμμετοχή **ΕΔΩ** το αργότερο **μέχρι 31/8/2020**. Για τους ενδιαφερόμενους ειδικά για το σεμινάριο, σημειώνεται ότι οι θέσεις είναι περιορισμένες και θα τηρηθεί σειρά προτεραιότητας.

Λίγα λόγια για το Σεμινάριο

Η διερευνητική ανάλυση δεδομένων (Exploratory Data Analysis) στοχεύει στην παρουσίαση των δεδομένων με τον καλύτερο –οπτικά– τρόπο και με τη λιγότερη δυνατή απώλεια πληροφορίας.

Η **οπτική αναλυτική** ή αναλυτική με οπτικοποίηση έχει οριστεί ως ένας συνδυασμός αυτοματοποιημένων τεχνικών ανάλυσης για αποτελεσματική κατανόηση, αιτιολόγηση και λήψη αποφάσεων με βάση μεγάλα και σύνθετα σύνολα δεδομένων.

Χρήσιμος σύνδεσμος: [What is Visual Analytics](#)

Σύντομη περιγραφή

Το σεμινάριο περιλαμβάνει μια περιήγηση σε on-line εργαλεία, εφαρμογές και ελεύθερο λογισμικό για διερευνητική ανάλυση και οπτικοποίηση δεδομένων από λογιστικά φύλλα του Excel χωρίς χρήση κώδικα. Θα παρουσιαστούν τεχνικές οπτικής αναλυτικής, τρόποι δημιουργίας οπτικών αναφορών και οπτικοποίησης πληροφορίας σε υπολογιστικά περιβάλλοντα.

Διδακτικές ενότητες

- Εγκατάσταση και γνωριμία με τα υπολογιστικά περιβάλλοντα

- Διαχείριση δεδομένων
- Δημιουργία και προσαρμογή βασικών στατιστικών και εναλλακτικών γραφημάτων
- Πρακτικές δημιουργίας διαδραστικών γραφημάτων, γραφημάτων με κίνηση (motion charts), οπτικών αναπαραστάσεων, οπτικών αναφορών.
- Τεχνικές αναλυτικής δεδομένων
- Απεικόνιση δισδιάστατων πινάκων δεδομένων
- Ανάλυση δεδομένων χρονοσειρών, διαστρωματικών δεδομένων, δεδομένων panel
- Αποθήκευση, διαμοιρασμός, διαχείριση, αξιοποίηση αρχείων αποτελεσμάτων

Σε ποιους απευθύνεται: προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές.

Προαπαιτούμενα: Εξοικείωση με το Microsoft Excel 2007 ή μεταγενέστερη έκδοση.

Απαιτούμενος εξοπλισμός: Οι συμμετέχοντες προσέρχονται με τους προσωπικούς φορητούς υπολογιστές τους. Η εγκατάσταση του λογισμικού θα γίνει στο χώρο του σεμιναρίου.

Συνοπτικό πρόγραμμα	
26/9 11:00-12:00	Εγκατάσταση πακέτων λογισμικού, διαμοιρασμός δεδομένων, κοινοποίηση συνδέσμων των on-line εργαλείων.
26/9 12:00-15:00	On-line διάλεξη με ενεργό ρόλο των συμμετεχόντων (hands-on training) και δυνατότητες διάδρασης με την εισηγήτρια.
27/9 11:00-13:00	On-line διάλεξη με ενεργό ρόλο των συμμετεχόντων (hands-on training) και δυνατότητες διάδρασης με τη διδάσκουσα.
27/9 13:00-14:00	Ανάθεση εργαστηριακής άσκησης για τη λήψη του πιστοποιητικού παρακολούθησης / επιτυχούς ολοκλήρωσης του σεμιναρίου. Η επιλογή του αρχείου δεδομένων είναι ελεύθερη και μπορεί να προέρχεται από το προσωπικό αρχείο των συμμετεχόντων ή από ανοικτά αποθετήρια δεδομένων.

Σχετικά με την Εισηγήτρια: Η Δρ. **Κυριακή Τσιλίκα** είναι Επίκουρη Καθηγήτρια στο **Τμήμα Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας** και μέλος ΣΕΠ στο ΕΑΠ. Σπούδασε μαθηματικά στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης και έλαβε διδακτορικό δίπλωμα από την Πολυτεχνική Σχολή του ΑΠΘ. Το ερευνητικό της αντικείμενο είναι οι Υπολογιστικές Μέθοδοι. Μια πτυχή του ερευνητικού της έργου αποτελεί η επιστημονική οπτικοποίηση (στατική και δυναμική), μια σύγχρονη επιστημονική τάση σε όλα σχεδόν τα επιστημονικά πεδία. Στην πρώτη διοργάνωση του **Pint of Science** στο Βόλο

συμμετείχε με την ομιλία «Πόσα δεδομένα χωράνε σε μια εικόνα;»

Νέα Μελών ΕΣΙ

Η κα. **Μαλβίνα Βαμβακάρη** εκλέχθηκε Καθηγήτρια Α' Βαθμίδας στο Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεματικής του **Χαροκοπείου Πανεπιστημίου**.

Η κα. **Φιλία Βόντα** εκλέχθηκε Καθηγήτρια Α' Βαθμίδας στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του **Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου**.

Η κα. **Βιολέττα Πιπερίγκου** εκλέχθηκε Μόνιμη Επίκουρη Καθηγήτρια στο Τμήμα Μαθηματικών του **Πανεπιστημίου Πατρών**.

Ο κ. **Δημήτρης Φουσκάκης** εκλέχθηκε Καθηγητής Α' Βαθμίδας στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του **Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου**.

Ο κ. **Αθανάσιος Ρακιτζής** εκλέχθηκε Μόνιμος Επίκουρος Καθηγητής στο Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του **Πανεπιστημίου Αιγαίου**.

Ο κ. **Παναγιώτης Μπομποτάς** εκλέχθηκε Επίκουρος Καθηγητής στο Τμήμα Μαθηματικών του **Πανεπιστημίου Θεσσαλίας**.

Νέα Μέλη του ΕΣΙ

Το ΕΣΙ καλωσορίζει τα νέα μέλη του

- (α) **Θωμά Γκελσίνη**
- (β) **Γεώργιο Αυλογιάρη** και
- (γ) **Παναγιώτη Παπασταμούλη**.

Διεθνές Συνέδριο EVA2021

Σημ. Σύνταξης: Η πιο κάτω ανακοίνωση εστάλη στο ΕΣΙ από το συνάδελφο Γιάννη Παπασταθόπουλο.

EVA2021 conference: Edinburgh 28/6 – 2/7/2021

Dear Colleagues,

On behalf of the local organizing committee, I am delighted to inform you that the 12th International Conference on Extreme Value Analysis (EVA2021) will take place in Edinburgh, United Kingdom, from June 28th to July 2nd, 2021.

The conference will schedule presentations of advances in research on Probability, Statistics, and Applications of Extreme Value Analysis. All the relevant information about the venue, scientific program, registration, submission of abstracts for contributed talks, etc., will become available on the website: <https://www.maths.ed.ac.uk/school-of-mathematics/eva-2021>

Looking forward to seeing you in Edinburgh!

Kind regards, Ioannis Papastathopoulos

ΑΦΙΕΡΩΜΑ Θ. ΚΑΚΟΥΛΛΟΣ

Το Στατιστικό Περισκόπιο συνεχίζει και στο παρόν τεύχος το αφιέρωμα στον εκλιπόντα **Ομότιμο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών και Επίτιμο Πρόεδρο του ΕΣΙ, Θεόφιλο Κάκουλλο**. Στο παρόν τεύχος περιλαμβάνονται εις μνήμην Θεόφιλου Κάκουλου

(α) ένα επιστημονικό άρθρο από τον συνάδελφο **Νίκο Παπαδάτο** καθώς και

(β) ένα άρθρο στην Αγγλική των συναδέλφων **Χαράλαμπος Χαραλαμπίδη και Narayanaswamy Balakrishnan** που δημοσιεύθηκε στο **AMSTATNEWS** του ASA.

Βιβλιοθήκη ΕΣΙ – ΔΩΡΕΑ Καθ. Θ. ΚΑΚΟΥΛΛΟΥ

Η οικογένεια του εκλιπόντος Ομότιμου Καθηγητού του Πανεπιστημίου Αθηνών και Επίτιμου Προέδρου του ΕΣΙ Θεόφιλου Κάκουλλου παραχώρησε υπό μορφή δωρεάς, στο ΕΣΙ, την προσωπική του βιβλιοθήκη αποτελούμενη από πλέον των 150 ξενόγλωσσων και πλέον των 50 ελληνικών επιστημονικών βιβλίων που καλύπτουν όλο το φάσμα των Μαθηματικών Επιστημών με έμφαση στην επιστημονική περιοχή των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Το ΕΣΙ έχει προχωρήσει στην καταγραφή των βιβλίων της δωρεάς και θα προβεί σύντομα στην τοποθέτησή τους σε ειδική θέση/χώρο στα γραφεία του ΕΣΙ. Μεταξύ των βιβλίων περιλαμβάνονται και τα ξενόγλωσσα έργα του που μνημονεύονται στο επόμενο άρθρο στο **AMSTATNEWS**:

(α) Το βιβλίο πρακτικών με τίτλο *Discriminant Analysis and Applications* που αφορά στο συνέδριο *NATO Advanced Study Institute on Discriminant Analysis and Applications* που διοργανώθηκε στην Αθήνα τον Ιούνιο του 1972 (Academic Press, 1973)

(β) Το βιβλίο *Exercises in Probability* (Springer, 1989) – ελεύθερα διαθέσιμο την περίοδο αυτή, από τον ιστότοπο του Springer <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-4526-1>

AMSTATNEWS - Θ. ΚΑΚΟΥΛΛΟΣ

Σημ: Το πιο κάτω άρθρο εις μνήμην Θ. Κάκουλλου, των συναδέλφων Χ. Χαράλαμπιδη και Ν. Balakrishnan δημοσιεύθηκε στο τεύχος 516 (Ιούνιος 2020) του AMSTATNEWS του American Statistical Association
<https://magazine.amstat.org/archives/2020-amstat-news/>

Theophilos N. Cacoullos was born April 5, 1932, in the village of Pachna in Limassol district, Cyprus. After his secondary education at Limassol Lanition Gymnasium (valedictorian, 1950), he studied mathematics at the University of Athens and earned his diploma (BSc) in 1954. Then, Cacoullos returned to Cyprus and worked for two years as a mathematics teacher at his alma mater high school.

In 1957, he went to the US on a scholarship from the Greek Scholarships Foundation for postgraduate study. He earned his MA in 1960 and then his PhD in 1962 in mathematical statistics from Columbia University. Cacoullos's master's thesis, with Alan Birnbaum, on median unbiased estimation prompted his paper, "Combinatorial Derivation of the Distribution of the Truncated Poisson Sufficient Statistic," published in the Annals of Mathematical Statistics. In 1989, Cacoullos characterized normality under spherical symmetry by the admissibility of Fisher's linear discriminant function in a paper in Statistics and Probability Letters. He established that, within the family of spherical normal scale mixtures, the normal maximizes the minimax probability of correct classification, provided the Mahalanobis distance between the two populations is the same. In the early 1960s, Cacoullos worked as a research associate at Stanford University. There, he developed ties with Herman Chernoff, Ingram Olkin, and Charles Stein, among others. He worked with Olkin, producing their joint 1965 Biometrika paper on the bias of functions of the characteristic roots of a random matrix.

In May 1962, Cacoullos returned to Cyprus, accepting the position of the director of the department of statistics and research of the new independent Republic of Cyprus. To pursue an academic career, however, he returned to the US, accepting an assistant professorship at the University of Minnesota. Yet, during his 15-month administrative work in Cyprus, he prepared his 1966 paper on nonparametric multivariate density estimation. In Minneapolis, he worked on characterizations of normality by constant regression of quadratic and linear forms. During the same

period, he discovered the interesting relation between the t and F distributions, published in JASA in 1965, and also exploited in relation to homoscedasticity tests for a bivariate normal. In 1965, Cacoullos returned to New York to take a position in the department of industrial engineering and operations research at New York University. While at New York University as associate professor, he was elected chair of probability and statistics at the University of Athens and, in 1968, returned to Greece to begin his 31-year career as mathematical and physical sciences faculty. An excellent teacher who never used notes but did use spontaneous humor, Cacoullos no doubt influenced many of his students. In addition to standard courses in statistics, he introduced combinatorics, linear programming, stochastic processes, and actuarial mathematics. In fact, he is an honorary member of the Greek Actuarial Society. Equally as important for the future of research in mathematical statistics in Greece was Cacoullos's supervision of several young mathematicians. C. A. Charalambides was his first doctoral student. Subsequently, many prominent colleagues earned their PhDs in mathematical statistics under his supervision or joint supervision. Among them are M. Koutras, V. Papathanasiou, and N. Papadatos, now professors of mathematical statistics. Cacoullos's interest in characterizations was renewed in the 1980s with characterizations of mixtures and priors by posterior expectations. With H. Papageorgiou, a fresh PhD at the time, Cacoullos coauthored several articles characterizing discrete distributions by a conditional and a regression function. Cacoullos visited McGill University in 1972–1973 and 1975–1976, always enjoying the collaboration and friendship of H. Ruben. Later in the fall of 1983, he gave a series of special lectures at the MIT Statistics Center at Chernoff's invitation. He visited the Center for Multivariate Analysis under the directorship of C. R. Rao, then at the University of Pittsburgh, in the spring of 1989.

Cacoullos published more than 70 papers in international journals. Recently, he became interested in the nature and history of probability and statistics. He published seven textbooks on probability and statistics in Greek and edited Discriminant Analysis and Applications, published in 1973 by Academic Press. In 1989, Springer published his book Exercises in Probability. His recent contributions on Chernoff-type and Cacoullos-type variance generated much interest and produced a variety of publications.

ΕΝΑΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ CAUCHY

Στην Μνήμη του Καθηγητή Θεόφιλου Κάκουλλου

Ήταν από παλιά γνωστή η αγάπη και η ένθερμη ενασχόληση του αγαπημένου Καθηγητή μας, Θεόφιλου, με την κατανομή Cauchy. Τούτη η σύντομη εργασία είναι αφιερωμένη στην μνήμη του.

Πριν από κάποιον καιρό ενημερώθηκα από το συνάδελφο Δημήτρη Χελιώτη για έναν χαρακτηρισμό της κατανομής Cauchy που ετέθη ως Πρόβλημα στο Στατιστικό Περισκόπιο Νο. 15, Οκτωβρίου-Νοεμβρίου 2005, από τον συνάδελφο Σίμο Μείντάνη. Ο χαρακτηρισμός διατυπώνεται ως εξής: Ας θεωρήσουμε την (φραγμένη) συνάρτηση

$$(1) \quad g(X, Y) = \frac{4}{4 + X^2} - \frac{1}{1 + (Y - X)^2},$$

όπου οι X, Y είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Τότε ισχύει η ισότητα $Eg(X, Y) = \frac{1}{3}$ αν και μόνο αν η κατανομή της X (και της Y) είναι η τυπική Cauchy με

$$\text{πυκνότητα } f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Στην πραγματικότητα ο χαρακτηρισμός αυτός ανάγεται σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, οδηγώντας σε ένα κάπως πιο γενικό αποτέλεσμα, ως εξής:

Θεώρημα. Για οποιεσδήποτε ανεξάρτητες και ισόνομες X, Y και για g όπως στην (1), ισχύει η ανισότητα

$$(2) \quad Eg(X, Y) \leq \frac{1}{3},$$

με ισότητα αν και μόνο αν η κατανομή των X, Y είναι η τυπική Cauchy.

Απόδειξη: Η χαρακτηριστική συνάρτηση της διπλής εκθετικής (Laplace) ισούται με $\varphi_0(t) = 1 / (1 + t^2)$, η δε πυκνότητά της είναι η $f_0(x) = (1/2)e^{-|x|}$. Συνεπώς,

$$(3) \quad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{itx} dt = \frac{1}{1 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Θέτοντας διαδοχικά στην (3) $x = X/2$ και $x = Y - X$ προκύπτουν οι τύποι

$$(4) \quad \frac{4}{4 + X^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2|t|} e^{itX} dt, \quad \frac{1}{1 + (Y - X)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{it(Y - X)} dt.$$

Αν λάβουμε μέσες τιμές στην (4) και εναλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης, σύμφωνα με το Θεώρημα Fubini, παίρνουμε τις σχέσεις

$$(5) \quad E \frac{4}{4 + X^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2|t|} \varphi(t) dt, \quad E \frac{1}{1 + (Y - X)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} |\varphi(t)|^2 dt,$$

όπου $\varphi(t)$ η κοινή χαρακτηριστική συνάρτηση των X, Y και $|\varphi(t)|^2 = \varphi(t)\varphi(-t) = \varphi(t)\overline{\varphi(t)}$, με $\overline{\varphi(t)}$ τον συζυγή μιγαδικό του $\varphi(t)$. Χρησιμοποιώντας την (5) καταλήγουμε στη έκφραση

$$(6) \quad Eg(X, Y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} (2e^{-|t|}\varphi(t) - |\varphi(t)|^2) dt := A(\varphi),$$

οπότε επικεντρωνόμαστε να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα $A(\varphi)$ ως προς όλες τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις φ . Στην συνέχεια δείχνουμε ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας,

μπορούμε να εξετάσουμε μόνο τις πραγματικές χαρακτηριστικές συναρτήσεις (δηλ., να θεωρούμε X, Y συμμετρικές γύρω από το μηδέν). Πράγματι, δοθείσης μίας $\varphi(t)$, η $\varphi_1(t) = (1/2)(\varphi(t) + \overline{\varphi(t)})$ είναι επίσης χαρακτηριστική συνάρτηση, και μάλιστα πραγματική. Επιπλέον, αν οι X_1, Y_1 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με χαρακτηριστική συνάρτηση φ_1 , τότε (βλ. (5))

$$E \frac{4}{4 + X_1^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2|t|} \varphi_1(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2|t|} \varphi(t) dt = E \frac{4}{4 + X^2},$$

ενώ

$$E \frac{1}{1 + (Y_1 - X_1)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} |\varphi_1(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} |\varphi(t)|^2 dt = E \frac{1}{1 + (Y - X)^2},$$

επειδή $|\varphi_1(t)|^2 \leq |\varphi(t)|^2$ για κάθε t . [Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|(z + \bar{z})/2|^2 \leq |z|^2$, με ισότητα αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός αριθμός. Πράγματι, αν γράψουμε $z = x + iy$ με x, y πραγματικούς, τότε $(z + \bar{z})/2 = x$, και συνεπώς $|(z + \bar{z})/2|^2 = ((z + \bar{z})/2)^2 = x^2 \leq x^2 + y^2 = |z|^2$, με ισότητα αν και μόνο αν $y = 0$.]

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι (βλ. (5), (6)) για κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση φ , $A(\varphi) \leq A(\varphi_1)$, με ισότητα όταν και μόνο όταν η φ είναι πραγματική χαρακτηριστική συνάρτηση.

Υποθέτοντας τώρα ότι η φ είναι πραγματική έχουμε $|\varphi|^2 = \varphi^2$ και, κατά συνέπεια,

$$A(\varphi) = E g(X, Y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \varphi(t) (2e^{-|t|} - \varphi(t)) dt.$$

Είναι τώρα προφανές ότι η τετραγωνική συνάρτηση $x \rightarrow x(2e^{-|t|} - x)$ μεγιστοποιείται μοναδικά για $x = x_0 = e^{-|t|}$. Κατά συνέπεια, για κάθε σταθερό πραγματικό t ισχύει η ανισότητα

$$\varphi(t) (2e^{-|t|} - \varphi(t)) \leq e^{-|t|} (2e^{-|t|} - e^{-|t|}) = e^{-2|t|},$$

με ισότητα αν και μόνο αν $\varphi(t) = e^{-|t|}$. Καταλήγουμε έτσι στην ανισότητα

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \varphi(t) (2e^{-|t|} - \varphi(t)) dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|t|} dt = \frac{1}{3},$$

με ισότητα αν και μόνο αν $\varphi(t) = e^{-|t|}$ για κάθε t . Παρατηρώντας ότι η $\varphi(t) = e^{-|t|}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυπικής Cauchy, η απόδειξη είναι πλήρης.

Πρόβλημα προς λύση: Αποδείξτε ότι για οποιεσδήποτε ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X, Y ,

$$\sqrt{2} E \exp\left(\frac{-X^2}{4}\right) - E \exp\left(\frac{-(Y - X)^2}{2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

με την ισότητα να επιτυγχάνεται όταν και μόνο όταν οι X, Y ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Νικόλαος Παπαδάτος, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ